



## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 8.02.2025

CLASA a XII - a

**Problema 1** Fie  $M = \{a, b, c, d\}$  și operația  $*$ :  $M \times M \rightarrow M$  o lege de compoziție internă pe  $M$ , astfel încât este asociativă și admite element neutru.

- a) Arătați că dacă pentru orice element  $x \in M$  există  $y \in M$  astfel încât  $x * y = e$ , atunci acest  $y$  este unic. Demonstrați că  $x$  are un invers în  $M$ .
- b) Considerăm tabelul parțial al operației :

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	?	?
c	c	?	a	?
d	d	?	?	a

Completați tabelul astfel încât să definească o structură de grup.

**Problema 2** Se consideră mulțimile  $H = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$  și  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$ .

- a) Să se determine elementele mulțimii  $H$ .
- b) Fie  $x, y \in H$  astfel încât  $x + y = \hat{0}$ . Să se arate că  $x = y = \hat{0}$ .
- c) Să se arate că  $G$  este un grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricilor.

**Problema 3** Să se calculeze  $\int \frac{12x+11}{(x+1) \cdot (2x+3) \cdot (3x+1) \cdot (6x+5) + 2026} dx$ ,  $x \in (0, +\infty)$

**Problema 4** a) Fie  $a, b > 0$ . Calculați  $\int_{-1}^1 \frac{1-a^x b^x}{a^x + b^x} dx$ .

b) Fie  $a, b > 0$ . Determinați  $\int_{-1}^1 \frac{a^{2x} + b^{2x} + 2}{a^x + b^x} dx$ .

G.M. NR. 4/2024

**NOTĂ:** Toate subiectele sunt obligatorii.  
Timp efectiv de lucru : 3 ore.  
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.